

Midterm — Elettrostatica e teorema di Gauss: soluzioni e griglia di correzione

Totale 60 punti; le parti con il salvagente  valgono 36 punti, il 60%: la sufficienza. Un errore di conto con procedura corretta costa 1 punto sulla parte, una volta sola: i valori successivi si correggono a partire dal dato sbagliato. Le tre versioni (x, y, z) hanno gli stessi Esercizi 3, 4 e 6–9; cambiano le domande dell'Esercizio 1 (ordine, dati e opzioni), l'ordine delle affermazioni dell'Esercizio 2 e la distribuzione dell'Esercizio 5.

Esercizio 1 — Risposta multipla (8 punti, tutti)

Soluzione —

Versione	1	2	3	4	5	6	7	8
x	B	A	D	D	D	A	A	D
y	D	B	D	D	C	C	C	A
z	A	C	B	B	D	C	A	A

Le otto domande sono le stesse in tutte le versioni, con dati diversi, ma in ordine diverso. Argomento di ciascuna posizione (numeri del prospetto qui sotto):

Versione	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	1	7	2	8	5	3	6
z	6	3	8	1	5	7	2	4

Argomento	x	y	z	Motivo
1. Strofinio	perde elettroni	acquista elettroni	acquista elettroni	Si spostano solo gli elettroni.
2. Coulomb, distanza	$F/4$	$F/9$	$4F$	$F \propto 1/r^2$.
3. Induzione	attratta	attratta	attratta	Le cariche si separano; quelle di segno opposto, più vicine, pesano di più.
4. Carica di prova	E e $2F$	E e $F/2$	E e $3F$	$E = F/q_0$ non dipende dalla sonda.
5. Linee di campo	più fitte	più fitte	più fitte	La densità delle linee misura l'intensità.
6. Flusso sulla sfera	uguale	uguale	uguale	$\Phi = Q/\epsilon_0$ a ogni raggio.
7. Gauss, carica esterna	0	0	0	Conta solo la carica racchiusa, e la sua somma è nulla.
8. E e distanza	dimezza (filo)	costante (piano)	un quarto (sfera)	$1/d$; costante; $1/r^2$.

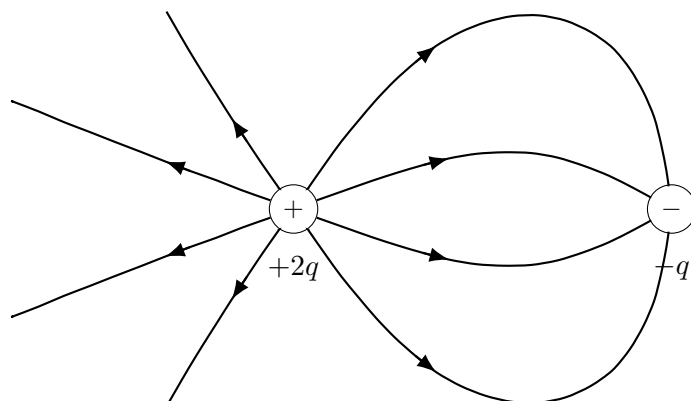
Esercizio 2 — Vero o falso (3 punti, tutti)

Soluzione — Le affermazioni sono tre: flusso e carica netta contenuta (**V**); flusso nullo implica campo nullo, falso perché un cubo in un campo uniforme ha flusso netto nullo ma campo diverso da zero (**F**); campo costante del piano infinito (**V**). Sequenza per versione:

Versione	(a)	(b)	(c)
x	V	F	V
y	V	V	F
z	F	V	V

Esercizio 3 — Le linee di campo di due cariche (4 punti, tutti 🎯)

Soluzione — Un punto per ciascun criterio: (1) *verso* corretto, le linee escono da $+2q$ ed entrano in $-q$; (2) *proporzione*: otto linee escono da $+2q$ e quattro entrano in $-q$, cioè la metà; (3) le linee non si incrociano; (4) le altre quattro linee non finiscono su $-q$ ma proseguono verso l'infinito.



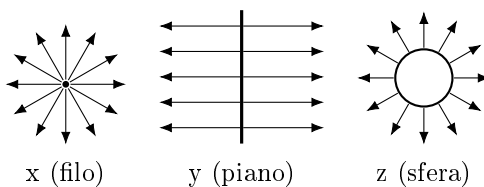
Esercizio 4 — Elettrizzazione (3 punti, tutti 🎯)

Soluzione — (a) **contatto**, la sfera resta carica **negativamente**. (b) **induzione**: la bacchetta respinge gli elettroni, che scendono a terra dal dito; la sfera resta carica **positivamente**. (c) **polarizzazione**: le cariche delle molecole della carta si orientano senza spostarsi. Un punto per ciascuna parte; in (a) e (b) servono sia il fenomeno sia il segno.

Esercizio 5 — Il campo di una distribuzione (2 punti, tutti 🎯)

Soluzione — Un punto per il verso (uscente, perché la carica è positiva), un punto per la geometria delle linee.

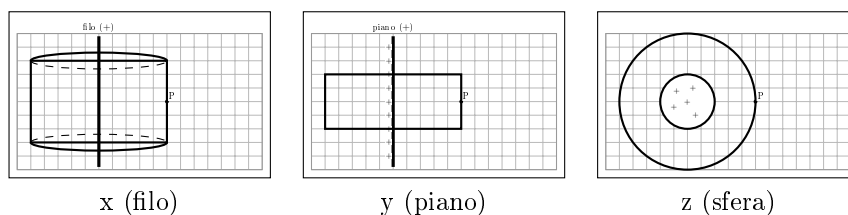
Vers.	Geometria delle linee	Campo
x (filo)	radiali, uscenti, perpendicolari al filo	$E \propto 1/d$
y	perpendicolari al piano, parallele ed	$E = \sigma/(2\epsilon_0)$
(piano)	equispaziate, da entrambi i lati	
z (sfera)	radiali, uscenti dalla sfera	$E \propto 1/r^2$ (fuori)



Esercizio 6 — La superficie gaussiana (3 punti, tutti ⚡)

Soluzione — Un punto per ciascun criterio: (1) *forma* adatta alla simmetria; (2) la superficie *passa per P*; (3) *orientamento* corretto rispetto alla distribuzione. Il disegno vale per la versione indicata.

- x (filo) cilindro coassiale col filo, con le basi perpendicolari al filo e la superficie laterale passante per P: visto di lato è un rettangolo con i lati lunghi paralleli al filo.
- y (piano) cilindro (o parallelepipedo) con l'asse perpendicolare al piano e le basi parallele al piano, a uguale distanza da esso, una delle due passante per P: visto di taglio è un rettangolo simmetrico rispetto al piano.
- z (sfera) sfera concentrica con la sfera carica, passante per P: in sezione è un cerchio concentrico.



Esercizio 7 — Due cariche su una retta (11 punti, di cui 5 ⚡)

Soluzione — (a) ⚡ [2 p.] Le due cariche sono positive: in M $\vec{E}_1$ punta verso $+x$ (si allontana da Q_1), $\vec{E}_2$ punta verso $-x$. Poiché $Q_2 = 4Q_1$ e M è equidistante, $E_2 = 4E_1$: il vettore $\vec{E}_2$ è quattro volte più lungo e $\vec{E}_{\text{tot}}$ punta verso $-x$, cioè verso Q_1 , con lunghezza $3E_1$. Un punto per i versi, uno per le lunghezze.

(b) ⚡ [1 p.] $F = k \frac{Q_1 Q_2}{d^2}$, **repulsiva** (cariche dello stesso segno).

(c) ⚡ [2 p.] Nel punto P i due campi hanno la stessa intensità:

$$k \frac{Q_1}{s^2} = k \frac{Q_2}{(d-s)^2}$$

P sta fra le cariche perché solo lì i due campi hanno versi opposti; fuori dal segmento puntano nello stesso verso e non si possono compensare.

(d) [2 p.]

$$F = (8,99 \times 10^9) \frac{(2,0 \times 10^{-6})(8,0 \times 10^{-6})}{(0,30)^2} \approx 1,60 \text{ N}$$

(e) [2 p.]

$$E_1 = k \frac{Q_1}{(0,15)^2} \approx 7,99 \times 10^5 \text{ N/C} \qquad E_2 = k \frac{Q_2}{(0,15)^2} \approx 3,20 \times 10^6 \text{ N/C}$$

$$E_{\text{tot}} = E_2 - E_1 \approx 2,40 \times 10^6 \text{ N/C} \quad \text{verso } Q_1 \text{ } (-x)$$

(f) [2 p.] Dalla condizione di (c), estraendo la radice: $\frac{d-s}{s} = \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} = 2$, quindi $d-s = 2s$ e

$$s = \frac{d}{3} = 0,100 \text{ m}$$

Esercizio 8 — La goccia sopra il filo (15 punti, di cui 5 🎯)

Soluzione — (a) 🎯 [2 p.] Sulla goccia agiscono il peso, verso il basso, e la forza elettrica, verso l'alto. Il filo è carico negativamente: il suo campo punta *verso* il filo, cioè verso il basso. La goccia ha elettroni in eccesso, quindi la forza ha verso opposto al campo, verso l'alto. Un punto per le forze, uno per il verso di $\vec{E}$ con la motivazione.

(b) 🎯 [2 p.] Condizione di equilibrio: $nEe = P$, con $E = \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 d}$ e $P = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 g$:

$$n e \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 d} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 g \Rightarrow n = \frac{8\pi^2\epsilon_0 d \rho r^3 g}{3 e |\lambda|}$$

(c) [3 p.]

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 2,14 \times 10^{-18} \text{ m}^3, \quad m = \rho V \approx 1,93 \times 10^{-15} \text{ kg} \\ P = mg \approx 1,89 \times 10^{-14} \text{ N}$$

(d) [2 p.]

$$E = \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{1,1 \times 10^{-7}}{2\pi(8,85 \times 10^{-12})(0,050)} \approx 3,96 \times 10^4 \text{ N/C}$$

(e) [3 p.]

$$n = \frac{P}{eE} = \frac{1,89 \times 10^{-14}}{(1,602 \times 10^{-19})(3,96 \times 10^4)} \approx 2,98 \Rightarrow n = 3$$

(f) 🎯 [1 p.] La goccia **scende**: $E \propto 1/d$ si dimezza, la forza elettrica si dimezza e il peso no.

(g) [2 p.] Si valuta in modo conseguente alla risposta data in (f). Con la distanza raddoppiata la forza elettrica è metà del peso: la risultante è $P - P/2 = P/2$ verso il basso (un punto), quindi $a = g/2 = 4,90 \text{ m/s}^2$ (con i dati: $4,87 \text{ m/s}^2$; un punto).

Esercizio 9 — Il teorema di Gauss in due situazioni (11 punti, di cui 3 🎯)

Soluzione — (a) 🎯 [1 p.] $\Phi_{\text{chiusa}} = \frac{q}{\epsilon_0}$.

(b) [2 p.] Per simmetria le sei facce hanno lo stesso flusso: $\Phi_{\text{coperchio}} = \frac{q}{6\epsilon_0} = \frac{6,0 \times 10^{-9}}{6(8,85 \times 10^{-12})} \approx 113 \text{ N m}^2/\text{C}$.

(c) [3 p.] Le cinque facce più il coperchio formano la superficie chiusa, quindi il flusso totale è la somma dei due contributi (un punto); il flusso sulle cinque facce è il totale meno quello del coperchio (un punto):

$$\Phi_5 = \Phi_{\text{chiusa}} - \Phi_{\text{coperchio}} = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5q}{6\epsilon_0} \approx 565 \text{ N m}^2/\text{C}$$

con il valore numerico come terzo punto.

(d) [1 p.] $E(2R) = k \frac{Q}{(2R)^2} = \frac{(8,99 \times 10^9)(5,0 \times 10^{-9})}{(0,60)^2} \approx 125 \text{ N/C}$.

(e) [2 p.] Dentro la sfera $E = \frac{kQr}{R^3}$; a $r = R/2$:

$$E = \frac{(8,99 \times 10^9)(5,0 \times 10^{-9})(0,15)}{(0,30)^3} \approx 250 \text{ N/C}$$

Un punto per la formula (o per la carica racchiusa $Q/8$ e l'area $S/4$), uno per il valore.

(f) 🎯 [2 p.] Dentro il campo cresce linearmente da zero, in $r = R$ è massimo, fuori scende come $1/r^2$. Un punto per il tratto crescente fino a R , uno per il tratto decrescente. Il grafico numerico:

